Nick

1. Prüfung: Integralrechnung 1

Name:	
Punkte:	

Hinweise:

- Zeit: 70 Min
- Schreibe die Lösungen aller Aufgaben zusammen mit dem vollständigen Lösungsweg auf ein separates Blatt. Lösungen ohne Lösungsweg geben keine Punkte.

Aufgabe 1

Berechne und vereinfache so weit wie möglich:

(a) $\int 5x^2 - 2x \, \mathrm{d}x$ (1P)

(b) $\int \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} \, \mathrm{d}x$ (2P)

(c) $\int \sin(2x^3 + 2) \cdot 12x^2 \, \mathrm{d}x$ (2P)

Aufgabe 2

Berechne die Fläche welche die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 9)^3 \cdot x$$

mit der x-Achse einschliesst. (5P)

Aufgabe 3

Hausaufgabe:

Für welchen Wert von a schliessen die Graphen der Funktionen

$$f_1 : y = ax$$

und

$$f_2 : y = x^2 - ax$$

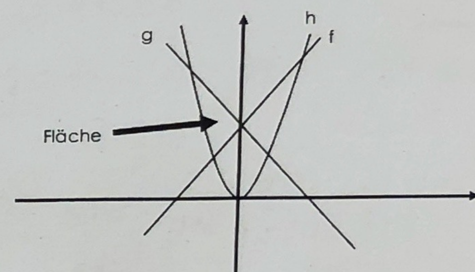
eine Fläche vom Inhalt $A = 36$ ein? (6P)

Aufgabe 4

Eine Parabel 2. Grades hat bei $x = 3$ eine Nullstelle und bei $x = 1$ ein Extremum. Die Fläche, welche der Graph der Funktion zwischen $a = 1$ und $b = 3$ mit der x-Achse einschliesst, beträgt 16. Wie lautet die Gleichung der Parabel? (7P)

Aufgabe 5

Die drei Funktionen $f(x) = 2x + 8$, $g(x) = -2x + 8$ und $h(x) = x^2$ schliessen mehrere Flächen ein. Berechne diejenige Fläche, welche in der unteren Skizze markiert ist. (Die linke Fläche, welche wie ein Dreieck aussieht.) (5P)



Aufgabe 6

SOL-Auftrag:

(a) Der Auftrag wurde pünktlich und korrekt auf Teams abgegeben. (2P)

(b) Wie lautet der Befehl, um mit Wolfram-Alpha die Ableitung von $f(x) = 3x^2$ zu bestimmen? (1P)

PRÜFUNG INTEGRALRECHNUNG 1, 2018

LÖSUNGEN

① a) $= -\frac{5}{3}x^3 - x^2 + c$

b) $= \int x^{-3/2}\, dx = -2x^{-1/2} + c = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$

c) $= \int \sin(u) \cdot 12x^2 \frac{du}{6x^2} = \int 2\sin(u)\, du = -2\cos(u) + c$

$u = 2x^3 + 2 \qquad u' = 6x^2$

$= -2\cos(2x^3+2) + c$

② Nullstellen bestimmen: $(x^2-9)^3 \cdot x = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$

Fläche bestimmen:

$\int (x^2-9)^3 \cdot x\, dx = \int u^3 \cdot x \frac{du}{2x} = \int u^3 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{8}u^4 + c$

$u = x^2 - 9 \qquad u' = 2x$

$= \frac{1}{4}(x^2-9)^4 + c$

$\left| \int_{-3}^{0} (x^2-9)^3 \cdot x\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{8}(x^2-9)^4 \right]_{-3}^{0} \right|$

$= \left| \frac{1}{8} \cdot (-9)^4 - \frac{1}{8} \cdot 0^4 \right| = \frac{6561}{8}$

$\left| \int_{0}^{3} (x^2-9)^3 \cdot x\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{8}(x^2-9)^4 \right]_{0}^{3} \right|$

$= \left| \frac{1}{8} \cdot 0^4 - \frac{1}{8}(-9)^4 \right| = \frac{6561}{8}$

Gesamtfläche: $\frac{6561}{8} + \frac{6561}{8} = \frac{6561}{4}$

③ Schnittpunkte bestimmen: $ax = x^2 - ax$

$0 = x^2 - 2ax$

$0 = x(x-2a)$

$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2a$

Fläche bestimmen: Ann.: a pos.

$\left| \int_{0}^{2a} x^2 - 2ax\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 \right]_{0}^{2a} \right| = \left| \frac{1}{3}(2a)^3 - a(2a)^2 - 0 \right|$

Ann.: a neg.

$= \left| \frac{8}{3}a^3 - 4a^3 \right| = \left| -\frac{4}{3}a^3 \right| = 36 \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$

$\left| \int_{2a}^{0} x^2 - 2ax\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 \right]_{2a}^{0} \right| = \left| 0 - \frac{8}{3}a^3 + 4a^3 \right|$

$= \left| \frac{4}{3}a^3 \right| = 36 \Rightarrow \underline{\underline{a = -3}}$

④ $p(x) = ax^2 + bx + c$

$p(3) = 9a + 3b + c = 0 \qquad \Rightarrow 9a - 6a + c = 0 \quad \Rightarrow c = -3a$

$p'(x) = 2ax + b$

$p'(1) = 2a + b = 0 \qquad \Rightarrow b = -2a$

$\left| \int_{1}^{3} ax^2 + bx + c\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right]_{1}^{3} \right|$

$= \left| 9a + 4.5b + 3c - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b - c \right|$

$= \left| 9a - 9a - 9a - \frac{1}{3}a + a + 3a \right|$

$= \left| -\frac{16}{3}a \right| \overset{!}{=} 16$

$\Rightarrow a_1 = 3, \quad b_1 = -6, \quad c_1 = -9$

oder $a_2 = -3, \quad b_2 = 6, \quad c_2 = 9$

⑤ Schnittpunkte von g und h: $-2x + 8 = x^2$

$0 = x^2 + 2x - 8$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -4$ und $x_2 = 2$

Schnittpunkte von f und h: $2x + 8 = x^2$

$0 = x^2 - 2x + 8$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 4$

$\left| \int_{-4}^{0} g(x) - h(x)\, dx \right| - \left| \int_{-2}^{0} f(x) - h(x)\, dx \right|$

$= \left| \int_{-4}^{0} -2x + 8 - x^2\, dx \right| - \left| \int_{-2}^{0} 2x + 8 - x^2\, dx \right|$

$= \left| \left[-x^2 + 8x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-4}^{0} \right| - \left| \left[x^2 + 8x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{0} \right|$

$= \left| 0 + 16 + 32 - \frac{1}{3}64 \right| - \left| 0 - 4 + 16 - \frac{1}{3}8 \right|$

$= \left| \frac{80}{3} \right| - \left| \frac{28}{3} \right| = \frac{80-28}{3} = 17.\overline{3}$