2017 Repetition (Klasse 6b)

Zeit: 70 Minuten

Schreibe die Lösungen aller Aufgaben zusammen mit dem vollständigen Lösungsweg, bzw. der vollständigen Begründung auf ein separates Blatt. Fehlende oder fehlerhaft geschriebene Lösungswege geben Abzug.

Aufgabe 1: Parabelgleichung (8 Punkte)

Eine Parabel 4. Ordnung hat im Ursprung einen Sattelpunkt und bei P=(2/8) die Steigung 28. Bestimme die Gleichung dieser Parabel.

Aufgabe 2: Rotationskörper (6 Punkte)

Die Fläche, welche $f(x) = x^2 + ax$ von 0 bis 1 mit der x-Achse einschliesst, rotiert um die x-Achse. Die Fläche des Rotationskörpers beträgt $\frac{113}{15}\pi$. Wie gross ist a? (Es gibt zwei mögliche Lösungen.)

Aufgabe 3: Gerade-Ebene (7 Punkte)

Gegeben sind die Ebene E: 2x+y-2z-6=0 und die Gerade:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne

a) den Durchstosspunkt von g mit E und

b) den Neigungswinkel von g gegenüber E.

Aufgabe 4: Kugel (7 Punkte)

Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M=(2/4/1) wird von der z-Achse in Z=(0/0/5) durchstossen (der zweite Durchstosspunkt spielt keine Rolle). Wie gross muss d in E: x+2y-2z+d=0 sein, damit E die Kugel in genau einem Punkt berührt? (Es gibt zwei mögliche Lösungen.)

RÜCKSEITE BEACHTEN!

Aufgabe 5: Stochastik (7 Punkte)

a) In einem Hotel gibt es 5 verschiedene Einzelzimmer. 3 verschiedene Personen möchten ein Zimmer buchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) Wir betrachten nun ein zweistöckiges Hotel. Im 1. Stock sind 5 verschiedene Einzelzimmer frei und im zweiten gibt es 4 verschiedene, freie Zimmer. 6 Personen wird zufällig je eines dieser Zimmer zugeteilt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Personen nicht gleichmässig auf die beiden Stöcke verteilt werden? (Dass also nicht genau 3 Personen Zimmer im 1. Stock und 3 im 2. Stock erhalten?)

2017 Repetition (Klasse 6b)

Aufgabe 1

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & p(0)=0 & \Rightarrow e=0 \\ \text{II} & p'(0)=0 & \Rightarrow d=0 \\ \text{III} & p''(0)=0 & \Rightarrow c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p(x) = ax^4 + bx^3 \\ p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 \end{array}$$

IV $\quad p(2) = 8 \Rightarrow 16a + 8b = 8 \quad \Rightarrow b = \frac{8}{8} - \frac{16}{8}a = 1 - 2a$

V $\quad p'(2) = 28 \Rightarrow 32a + 12b = 28$

V $\quad 32a + 12(1 - 2a) = 28$

$32a + 12 - 24a = 28$

$8a + 12 = 28$

$8a = 16 \Rightarrow a = 2, \quad b = 1 - 2 \cdot 2 = -3$

$\underline{\underline{p(x) = 2x^4 - 3x^3}}$

Aufgabe 2

$\pi \cdot \int_0^1 (x^2 + ax)^2 \, dx = \frac{113}{15} \pi \quad / : \pi$

$\int_0^1 (x^2 + ax)^2 \, dx = \int_0^1 x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{3}a^2x^3 \right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2 \right) - 0 = \frac{113}{15} \quad / \cdot 15$

$3 + 7{,}5a + 5a^2 = 113$

$5a^2 + 7{,}5a - 110 = 0 \quad \Rightarrow$ Lösungsformel

$\underline{\underline{a_1 = 4}}, \quad \underline{\underline{a_2 = -5{,}5}}$

Aufgabe 3

a) $D = (4 + 3t / -4t / 0)$

$2 \cdot (4 + 3t) + (-4t) - 2 \cdot 0 - 6 = 0$

$8 + 6t - 4t - 6 = 0$

$2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$

$D = (4 + 3(-1) / -4(-1) / 0) = \underline{\underline{(1 / 4 / 0)}}$

b) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}_g}{|\vec{n}_E||\vec{v}_g|}\right)$, $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_E \cdot \vec{v}_g = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 = 6 - 4 + 0 = 2$

$|\vec{n}_E| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{v}_g| = \overline{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \overline{9 + 16 + 0} = \overline{25} = 5$

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3 \cdot 5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{15}\right) = \underline{\underline{7{,}66^\circ}}$

Aufgabe 4

$r = |\vec{MZ}| = \left|\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-4 \\ 5-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

$\Rightarrow$ Der Abstand von M zu E muss auch 6 betragen.

$\frac{|2 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + a|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6 \quad / \cdot 3$

$|2 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + a| = 18$

$|8 + a| = 18 \Rightarrow$ Fall 1: $8 + a = 18$, $\underline{\underline{a = 10}}$ Fall 2: $8 + a = -18$, $\underline{\underline{a = -26}}$

Aufgabe 5

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ oder

$n = 5$

$k = 3$ $\quad Vow = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

b) $\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{10 \cdot 4}{84} = 0{,}476 = 47{,}6\% = P(\text{gleichm.})$

$P(\text{nicht gleichm.}) = 1 - 0{,}476 = 0{,}524 = \underline{\underline{52{,}4\%}}$