2. Prüfung: Vektorgeometrie 3

Name:	
Punkte:	

Hinweise:

- Zeit: 70 Min
- Schreibe die Lösungen aller Aufgaben zusammen mit dem vollständigen Lösungsweg auf ein separates Blatt. Lösungen ohne Lösungsweg geben keine Punkte.

Aufgabe 1

Die Punkte $A = (1/4/-2)$, $B = (2/3/3)$ und $C = (-3/2/3)$ liegen auf einer Ebene.

(a) Gib die Gleichung dieser Ebene an. (3P)

(b) Liegt der Punkt $P = (1/-2/3)$ auf dieser Ebene? (1P)

Aufgabe 2

Berechne den Winkel zwischen den Ebenen

$$E: \quad 4x - 2y + z + 4 = 0$$

und

$$F: \quad 2x + 3y - z - 4 = 0.$$

(4P)

Aufgabe 3

Der Durchstosspunkt der Ebene

$$E: \quad ax - y + 2z + b = 0$$

mit der Geraden

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ b \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist $D = (1/2/-2)$. Berechne a und b. (4P)

Aufgabe 4

Bestimme c, wenn die Gerade

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu

$$E: \quad 3x + cy + z = 0$$

den Neigungswinkel $45°$ hat. (6P)

Aufgabe 5

Hausaufgabe:

Welche Punkte auf der z-Achse haben den gleichen Abstand von den Ebenen

$$E: \quad 7x + 4y - 4z - 26 = 0 \quad \text{und} \quad F: \quad x - 4y + 8z + 10 = 0\ ?$$

(6P)

Aufgabe 6

Integriere und vereinfache so weit wie möglich. (In der Lösung sollten also keine gebrochenen oder negativen Exponenten vorkommen.)

(a) $\int \frac{7}{x} + 2x \, \mathrm{d}x$ (2P)

(b) $\int 2x \cdot \sin(2x^2 + 5) \mathrm{d}x$ (2P)

Aufgabe 7

SOL-Auftrag:

Auftrag erfüllt alle Kriterien. (3P)

Prüfung: Vektorgeometrie 3, 6C, 2018

① a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-25\\-6\end{pmatrix}$

$\vec{n_E} = \begin{pmatrix}5\\-25\\-6\end{pmatrix}$, $d = -\vec{n_E} \cdot \vec{OA} = -\begin{pmatrix}5\\-25\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} = -(5-100+12)$
$= 83$

$\Rightarrow \underline{5x - 25y - 6z + 83 = 0}$

b) $5 \cdot 1 - 25 \cdot (-2) - 6(3) + 83 = 95 \neq 0$

Der Punkt P liegt nicht auf der Ebene

② $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n_F} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\|}\right) = \arccos\left(\frac{8-6-1}{\sqrt{16+4+1} \cdot \sqrt{4+9+1}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{294}}\right) = \underline{\underline{86.66°}}$$

③ $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\b\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow t = -2$

$\Rightarrow 2 = b - 2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \underline{b = 4}$

$\Rightarrow E:\ ax - y + 2z + 4 = 0$

$\cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-2) + 4 = 0$

$a - 2 = 0$

$\Rightarrow \underline{a = 2}$

④ $\vec{v_g} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}3\\c\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_g} \cdot \vec{n_E} = 3 - 2c + 2 = 5 - 2c$

$|\vec{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$|\vec{v_g}| = \sqrt{9+c^2+1} = \sqrt{10+c^2}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{\vec{v_g} \cdot \vec{n_E}}{|\vec{v_g}| \cdot |\vec{n_E}|}\right)$

$\sin(45°) = \frac{5-2c}{3\sqrt{10+c^2}} \quad | \cdot 3\sqrt{10+c^2}$

$3\sqrt{10+c^2}\ \sin(45°) = 5 - 2c$

$9 \cdot (10+c^2)(\sin(45°))^2 = 25 - 20c + 4c^2$

$0 = c^2(4 - 9\sin(45°)^2) - c \cdot 20 + (25 - 90(\sin(45°))^2)$

$0 = -0.5c^2 - 20c - 20$

$0 = 0.5c^2 + 20c + 20$

$c_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 0.5 \cdot 20}}{1} = \frac{-20 \pm \sqrt{360}}{1}$

$\Rightarrow c_1 \approx -1.03$ und $c_2 \approx -38.97$

⑤ $P = (0/0/z)$

HNF: $E:\ \frac{7x + 4y - 4z - 26}{\sqrt{49+16+16}} = 0$

$F:\ \frac{x - 4y + 8z + 10}{\sqrt{1+16+64}} = 0$

$\left|\frac{7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4z - 26}{9}\right| = \left|\frac{0 - 4 \cdot 0 + 8z + 10}{9}\right|$

$\left|\frac{-4z-26}{9}\right| = \left|\frac{8z+10}{9}\right|$

$|-4z-26| = |8z+10|$

$\Rightarrow -4z_1 - 26 = 8z_1 + 10 \Rightarrow -36 = 12z_1 \Rightarrow \underline{\underline{z_1 = -3}}$

$\Rightarrow -4z_2 - 26 = -(8z_2 + 10) \Rightarrow 4z_2 = 16 \Rightarrow \underline{\underline{z_2 = 16}}$

⑥ $\int \frac{7}{x} + 2x\ dx = \int \frac{7}{x}\ dx + \int 2x\ dx = 7\ln(x) + x^2 + c$

$\int 2x \cdot \sin(2x^2+5)\,dx = \int 2x \cdot \sin(u)\ \frac{du}{4x}$

$u = 2x^2 + 5$

$u' = 4x$

$= \int \frac{1}{2} \sin(u)\ du$

$= -\frac{1}{2} \cos(u)$

$= -\frac{1}{2} \cos(2x^2 + 5)$