2. Prüfung: Vektorgeometrie 3

[redacted]

Name:	[redacted]
Punkte:	[redacted]

[redacted]

Hinweise:

- Zeit: 70 Min
- Schreibe die Lösungen aller Aufgaben zusammen mit dem vollständigen Lösungsweg auf ein separates Blatt. Lösungen ohne Lösungsweg geben keine Punkte.

Aufgabe 1

Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch die beiden parallelen Geraden aufgespannt wird: (4P) 3

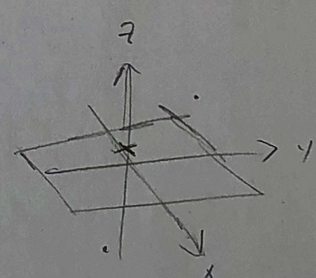
$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{A} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \quad \text{und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

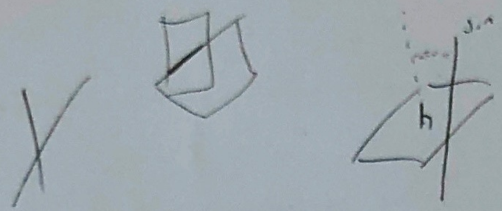
✓ Aufgabe 2

Bestimme den Durchstosspunkt der Ebene $E: 2x - y + 3z + 2 = 0$ und der Geraden, welche durch $P = (1/1/1)$ und $Q = (2/-1/0)$ verläuft. (4P) 4

✓ Aufgabe 3

Gegeben sind der Punkt $A = (9/-5/1)$ und die Ebene $E: 4x - 3y - 1 = 0$. Gib einen Punkt an, welcher von A aus gesehen auf der anderen Seite der Ebene E liegt, aber zu E den gleichen Abstand hat, wie A. (4P) 4





Aufgabe 4

Die Ebenen $E:\ 5x - 2y + 6 = 0$ und $F:\ 2x - y + z - 3 = 0$, sowie die Gerade

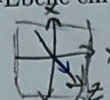
$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sind gegeben. Bestimme den Schnittwinkel der Geraden g ~~und~~ mit der Schnittgeraden der Ebenen. (5P) 5

Aufgabe 5

Hausaufgabe:

Für welchen Wert u schliesst die Ebene $E:\ 4x + uz - 1 = 0$ mit der xy-Ebene einen Winkel von $45°$ ein? (5P) 5



(0/0/z)

Aufgabe 6

Integriere und vereinfache so weit wie möglich. (In der Lösung sollten also keine gebrochenen oder negativen Exponenten vorkommen.)

+C

(a) $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ (2P) 2

(b) $\int (20x + 6) \cdot \sqrt{5x^2 + 3x}\,\mathrm{d}x$ (2P) 1

Aufgabe 7

SOL-Auftrag:

Auftrag erfüllt alle Kriterien. (3P) 2

Truttmann Nick

Prüfung: Vektorgeometrie 3

Nr. 1

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -23 \\ 7 \end{pmatrix}$ (✓)

$ax + by + cz + d = 0$

$(7 \cdot 20) + (4 \cdot -23) + (5 \cdot 7) + d = 0$ (✓)

$83 + d = 0$

$d = -83$

~~E: 20a - 23b~~

$E: 20x - 23y + 7z - 83 = 0$

(✓)

Nr. 2

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

$x = 1 + t$
$y = 1 - 2t$
$z = 1 - t$

$2(1+t) - (1-2t) + 3(1-t) + 2 = 0$ ✓

$2 + 2t - 1 + 2t + 3 - 3t + 2 = 0$

$t = -6$ ✓

$E: 2x - y + 3z + 2 = 0$

$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $D = (-5 / 13 / 7)$ ✓

Nick 6c

Nr. 3

HNF: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $\qquad$ $10 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

HNF $= \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} = 0$

$e = |au + bv + cw + d|$

$e = |9 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot 1 - \frac{1}{5}|$

$e = 10$

$\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - 20 \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $P = (-7 / 7 / 1)$

✓

Sehr gut!

Nr. 4

$n_E = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $n_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $n_E \times n_F = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot -1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\sigma}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{s} \cdot \vec{v}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \frac{4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 0{,}22$ $\vec{s} \cdot \vec{v} = 2 + 5 - 3 = 4$

$\underline{\underline{\alpha = 77{,}279°}}$

Nr. 5

$\cos(45) = \left(\frac{n_E \cdot n_F}{|n_E| \cdot |n_F|}\right)$

$n_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$; $n_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $n_E \cdot n_F = v$ $|n_E| = \sqrt{16 + v^2}$

$|n_F| = \sqrt{1^2} = 1$

$0{,}707 = \frac{v}{1 \cdot \sqrt{16 + v^2}}$

$0{,}707 \cdot \sqrt{16 + v^2} = v$

$0{,}5 \cdot (16 + v^2) = v^2$

$8 + 0{,}5v^2 = v^2$

$8 = 0{,}5v^2$

$16 = v^2$

$\underline{\underline{4 = v_1}}$

$\underline{\underline{-4 = v_2}}$

Nr. 6

a) $\int 5 \cdot x^{-2/3} dx = 5 \int x^{-2/3} dx = 5 \cdot x^{1/3} \cdot 3 = \underline{\underline{15 \sqrt[3]{x} + C}}$

b) $\left(\int 20x + 6\, dx = \frac{20x^2 + 6x}{2}\right)$

$20x+6 \int \sqrt{5x^2 + 3x}\, dx = \int \sqrt{v}\, dv = v^{3/2} \cdot \frac{1}{v'}$ $v = 5x^2 + 3x$

$= \sqrt[2]{(5x^2 + 3x)^3} \cdot \frac{1}{10x + 3}$ $v' = 10x + 3$

$= (20x + 6) \cdot \sqrt[2]{(5x^2 + 3x)^3} \cdot \frac{1}{10x + 3}$

$= \frac{20x + 6}{10x + 3} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt[2]{(5x^2 + 3x)^3} + C}}$

$v = 5x^2 + 3x$

$v' = 10x + 3$

b) $\int 20x + 6\, \cancel{dx} \cdot \sqrt{5x^2 + 3x}\, dx$

$\int \frac{20x + 6}{10x + 3} \cdot v^{0{,}5}\, dv$

$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot v^{3/2}$

$\frac{4 \cdot \sqrt[3]{(5x^2 + 3x)^2}}{3}$

:)