# Diffrenzialrechnung 1 & 2

- Die Durchschnittsgeschwindigkeit gibt an, um wie viel sich y auf ein x Vergrössert. Y/X = $v_{\emptyset}$

## Differenzenquotient

Auch mittlere Änderungsrategenannt, beschreibt die Steigung auf einem bestimmten Intervall.

M = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Interval: [2, 3]

$f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ Intervall: [2,3]

$f(2) = 5$ $f(3) = 5{,}75$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5{,}75-5}{3-2} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75$$

## Differenzialquotient

Der Differenzenquotient oder lokale Änderungsrate, berechnet die Steigung in einem Punkt, in dem er die Tangente von zwei Punkten berechnet. Dabei werden die Punkte sehr nahe zusammengeschoben.

$$m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Graphen welche eine Springstelle (einen Knick) haben, sind nicht differenzierbar. Sie haben keine Ableitung. An der Sprungstelle kommt es darauf an, ob von oben oder von unten an die Stelle angenähert wird.

$f(x) = 3x^2$ $x_0 = 0{,}3$

Tangentensteigung $m_{x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0{,}3+h) - f(0{,}3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(0{,}3+h)^2 - 3(0{,}3)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{0{,}27} + 1{,}8\cancel{h} + 3h^{\cancel{2}} - \cancel{0{,}27}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1{,}8 + 3h \rightarrow \underline{1{,}8}$$

$$\begin{array}{llll}
f(x) = & c & f'(x) = & 0 \quad (c \in \mathbb{R}) \\
f(x) = & mx & f'(x) = & m \quad (m \in \mathbb{R}) \\
f(x) = & x^2 & f'(x) = & 2x \\
f(x) = & \frac{1}{x} & f'(x) = & -\frac{1}{x^2} \\
f(x) = & \sqrt{x} & f'(x) = & \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f(x) = & \sin(x) & f'(x) = & \cos(x) \\
f(x) = & \cos(x) & f'(x) = & -\sin(x) \\
f(x) = & e^x & f'(x) = e^x &
\end{array}$$

- f' ist die Ableitung von f. Dabei ist f die Stammfunktion.
- f(x) = -cos(x) f'(x) = sin(x)
- f(x) = -sin(x) f'(x) = -cos(x)

## Potenzregel

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(mit\ n \in \mathbb{R})$ Bsp: $x^3 \rightarrow 3x^2$

## Summenregel & Faktorregel

$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$ $x+mx \rightarrow 2x + m$

$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$ ← Nur so lange man x hat. $10 + x^2$ $10 + 2x$

## Produktregel

$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $x^3 \cdot 2x \rightarrow 3x^2 \cdot 2x + x^3 \cdot 2$

## Quotientenregel (mit $g(x) \neq 0$)

$$\frac{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

## Kettenregel

- Die innere Funktion ist diejenige, welche man beim Einsetzen zuerst ausrechnen würde.
- f(x) ist die äussere Funktion. G(x) ist die innere Funktion.

$h'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ $\cos(3x-1) \rightarrow -\sin(3x-1) \cdot 3$

## Schnittwinkel zweier Funktionen

- Schnittwinkel $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right)$
- Falls $m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow Winkel\ ist\ 90° \ und\ die\ Formel\ geht\ nicht.$
- $m_1/m_2$ ist die Steigung im Punkt 1//2.
- Der Schnittwinkel ist per Definition immer kleiner als 90 Grad.

## Tangentengleichung

Gesucht ist eine Gleichung, welche eine Funktion an einer bestimmten Stelle berührt.

$L:\ y = 4x + b$

$f(x) = x^3 + x$ mit $x = -1$

1. Punkt bestimmen
$f(x) = -1^3 + (-1)$
$f(x) = -2$
$P(-1/-2)$

2. Steigung bestimmen
$f'(x) = 3x^2 + 1$
$f'(-1) = 3 + 1 = 4$

3. Y-Achsenabschnitt bestimmen
$g(x) = mx + b$
$g(x) = 4x + b$
$-2 = 4x + b$
$2 = b$

# Teil 2

Eine Funktion ist

Achsensymmetrisch bezüglich der Y-Achse wenn:

$f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrisch:

$f(-x) = -f(x)$

- Die Ableitung einer Funktion zeigt uns die Steigung. Die zweite Ableitung zeigt die Steigung der Steigung.
- Wenn f''(x) > 0 → Die ursprüngliche Funktion ist links gekrümmt.
- Wenn f''(x) < 0 → Die ursprüngliche Funktion ist rechts gekrümmt.

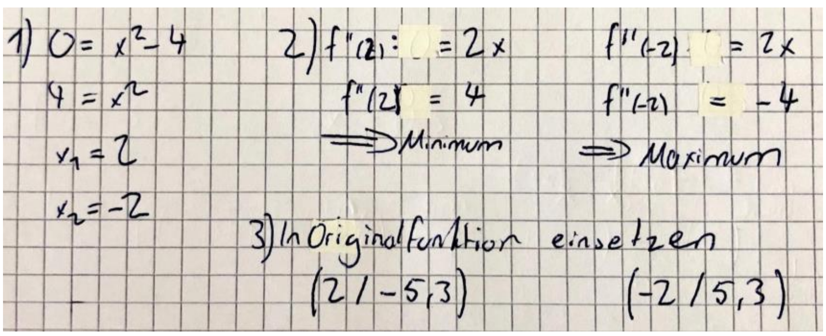
## Wendepunkt

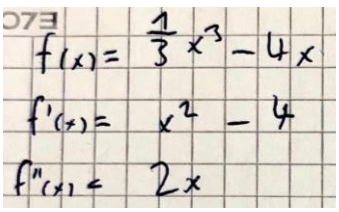
- In einem Wendepunkt kehrt sich eine Funktion von linksgekrümmt zu rechtsgekrümmt.
- Wenn $f(x_0)'' = 0 \; und \; f(x_0)''' \neq 0$ dann ist bei $(x_0)$ ein Wendepunkt.

## Extrema

- Maxima und Minima sind Extrema.
- Ein Extrema hat die Steigung 0, danach wird die Steigung anders als vorher (also Neg.–0-Pos. oder Pos.-0-Neg.)
- Das Maxima beginnt mit einer positiven Steigung, das Minima negativ.
- Ein Sattelpunkt hat die Steigung 0, wobei die Steigung vorher und nachher gleich sind (also pos-0-pos).
- Wenn $f(x_0)' = 0 \; und \; f(x_0)'' < 0 \quad ==> Maximum$
- Wenn $f(x_0)' = 0 \; und \; f(x_0)'' > 0 \quad ==> Maximum$
- Wenn $f(x_0)' = 0 \; und \; f(x_0)'' = 0 \; und \; f(x_0)''' \neq 0 \quad ==> Maximum$





## Polstellen

- m beschreibt den höchsten Polynom und heisst Grad des Polynoms.
- Eine Funktion kann höchstens m x-Werte haben, welche nicht definiert sind.
- Bei mehreren Polstellen muss der Prozess jedes Mal neu durchgeführt werden.

$f(x) = \frac{a_n x^n}{a_m x^m}$

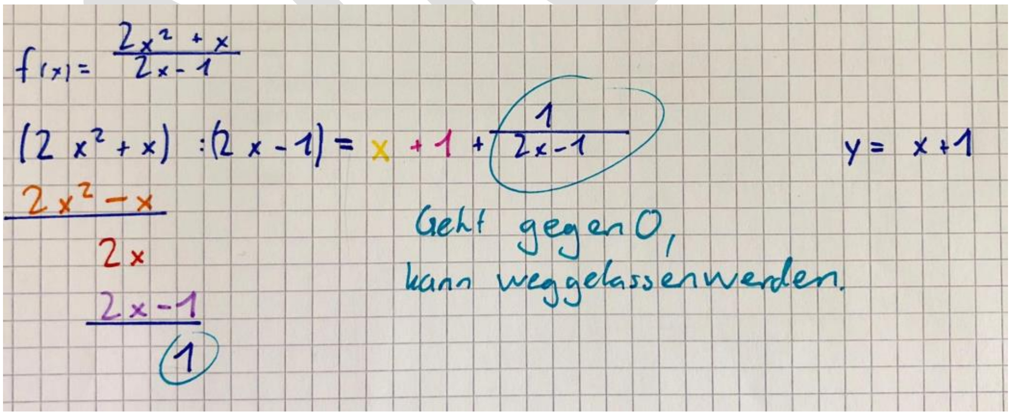
Wenn n < m ➔ Die x-Achse ist die Asynptotme.4
n = m ➔ Die Funktion hat eine waagerechte Asymptote.
n = m + 1 ➔ Die Asymptote kann durch Polynomdivision herausgefunden werden.
n > m + 1 ➔ Eine Parabel als Näherungskurve.

Beispiel Polynomdivision: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1) Wann ergibt sich null unter dem Bruchstrich, ist also nicht definiert?
   → x = 1
   $Für\ x \to 1; x > 1, ist\ also\ \frac{pos}{pos} = pos, also\ f(x) \to +\infty$
   $Für\ x \to 1; x < 1, ist\ also\ \frac{pos}{neg} = neg, also\ f(x) \to -\infty$

## Asymptoten

Durch Polynomdivision erhält man die Asymptote von gebrochenen Funktionen.




## Vorgehen bei Kurvendiskussion

1) Definitionsbereich festlegen: Bei Brüchen, Wurzeln oder $sin^{-1}$ gibt es verbotene Zahlen. Diese müssen bestimmt werden.
2) Wir müssen das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs untersuchen. Dies heisst, wohin die Funktion bei $+\infty$ & $-\infty$, aber auch bei den Polstellen geht.

3) Wir untersuchen, ob die Funktion Punkt oder Achsensymmetrisch ist.
4) Wir suchen die Nullstellen. Hierfür setzen wir die Gleichung f(x) = 0 und lösen auf.
5) Wir berechnen den Y-Achsenabschnitt. Hierfür rechnen wir f(0) aus.
6) Wir bestimmen die Extrema, also Minima, Maxima und Sattelpunkte.
7) Wir bestimmen die Wendepunkte wie bereits erklärt.
8) Wir bestimmen die Polstellen und Asymptoten.
9) Mit den obigen Überlegungen sollte es möglich sein, eine relativ genaue Skizze des Graphen anzufertigen.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1) $D = \{\mathbb{R}\}$

2) $x \to +\infty : \infty$

$x \to -\infty : -\infty$

3) $f(-x) = f(x)$

$\frac{1}{3}x^3 - 4x = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ | f

$\frac{1}{3}x^3 - 4x = -(\frac{1}{3}x^3 + 4x)$ | ✓

Punktsymetrisch

4) $f(x): 0 = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

$0 = x^3 - 12x$

$0 = x(x^2 - 12)$

$x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{12}$; $x_3 = -\sqrt{12}$

5) $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0$

$f(0) = 0$

6) $f'(x) = x^2 - 4$

$f''(x) = 2x$

$f'''(x) = 2$

$f'(x) = 0 = x^2 - 4$

$4 = x^2$

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$

$f''(2) = 4 \to$ Minima $(2|-5{,}33)$

$f''(-2) = -4 \to$ Maxima $(-2|5{,}33)$

7) $f''(x): 0 = 2x$

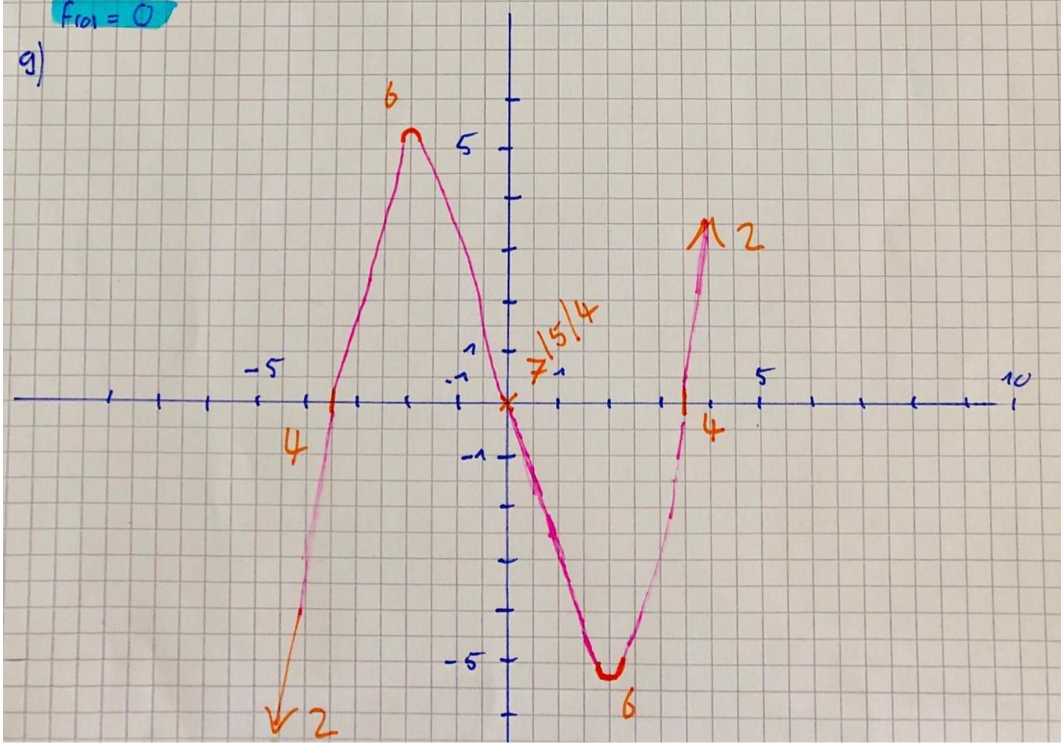
$x = 0$

$f'''(0) = 2$ ✓ Wendepunkt $(0|0)$

8) Keine Polstelle, da keine gebrochene Funktion.

Asymptote: "$\frac{1}{3}x^3 - 4x$"

9)



## Extremalwertaufgaben

Bei Extremalwertaufgaben soll unter Einhaltung gewisser Nebenbedingungen eine Grösse (Volumen, Länge, Fläche, etc.) vergrössert werden.

Zuerst schreiben wir alle Bedingungen auf (Nebenbedingungen und Hauptbedingung)

Danach lösen wir alle Nebenbedingungen auf und setzen sie so in die Hauptbedingung dass nur eine Variable erhalten bleibt.

Wir bestimmen nun das Maximum/Minimum der Zielfunktion.

### Beispiel:

Das Produkt aus den drei Zahlen a, b und c deren Produkt P möglichst gross sein soll und welche die zusätzlich folgenden Bedingungen erfüllen: Ihre Summe beträgt 90 und a ist viermal so gross wie b.

Zielfunktion: $P = a \cdot b \cdot c$

Nebenbedingung: I $a + b + c = 90$

II $\mathrm{a} = 4\mathrm{b}$

I $c = 90 - 5b$

ZF: P(b)=$4b \cdot b \cdot (90 - 5b)$

P(b)=$360b^2 - 20b^3$

$P'(b) = 720b - 60b^2$

$P''(b) = 720 - 120b$

P'(b): $0 = 720\mathrm{b} - 60b^2$

$0 = \mathrm{b}(720 - 60b)$

$b_{1=0}$

$b_2 = 12$

P''(0) = 720 → Minimum

P''(12) = -720 →Maximum

b=12

a=b*4 = 48

c=90-48-12=30