Integralrechnung

Regeln zum Interieren

Potenzregel

Die Hochzahl wird um eins erhöht, danach wird der neue Term durch die neue Hochzahl geteilt.

$$\boxed{\int 2x^2 dx = {}^2/_3\, x^3 + C}$$

- Konstanten dürfen ausserhalb des Integralzeichens geschrieben werden und müssen nicht beachtet werden.
- $\int f(x) + g(x) = \int f(x) + \int g(x)$

Substitution

Die Substitution wird verwendet, um schwierige Funktionen zu integrieren. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass sich vor dem integrieren nur die Variabel der Substitution in dem Integralzeichen befinden darf. Der zu ersetzende Term wird also mit u ersetzt, während dx mit du/u' ersetzt wird:

$$\int 12x(3x^2-5)dx = \int \cancel{12x} * u^4 * \frac{1}{\cancel{6x}} du = 2 * \frac{u^5}{5} = {}^2/_5\,(3x^2-5)^5 + C$$

$$mit\ u = 3x^2 - 5$$
$$und\ u' = 6x$$

Umformen

$\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$ $\quad\quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

f(x): Integrand
x: Integrationsvariable
c: Integrationskonstante
dx: Differenzial des unbestimmten Integrals

$$\boxed{\int f_{(x)}\, dx = F_{(x)} + c}$$

Definition Integrieren: Integrieren bedeutet, zu einer Funktion die Stammfunktion zu bestimmen.

Obersumme und Untersumme

Das Prinzip der Ober/Untersumme ist relativ einfach: Die zu berechnende Fläche wird in kleine, gleichmässige Streifen unterteilt. Danach wird ein Rechteck berechnet, welches die breite des Streifens und die Höhe des Tiefesten Wertes im Streifen hat. Dasselbe wird für den Höchsten Wert wiederholt. Wenn alle diese Rechtecke, jeweils die Oberen resp. Unteren zusammengezählt wurden, ergibt dies einen minimalen und einen Maximalen Wert. Der effektive Wert der Fläche liegt irgendwo dazwischen. Integralrechnen ist eine Erweiterung hiervon, wobei die Streifen unendlich klein sind.

Flächenberechnungen

Mit einem bestimmten Integral kann eine Fläche unter einer Funktion bestimmt werden. Dabei interessiert und ein ganz bestimmter Bereich. Der Anfangs- und Endpunkt wird jeweils unter resp. oberhalb des Integralzeichen geschrieben:

$$\int_{Start}^{Ende} f(x)\, dx$$

Um eine solche Funktion auszurechnen, setzt man den Endpunkt in die Integrierte Gleichung ein und subtrahiert die Funktion mit dem Startwert eingesetzt.

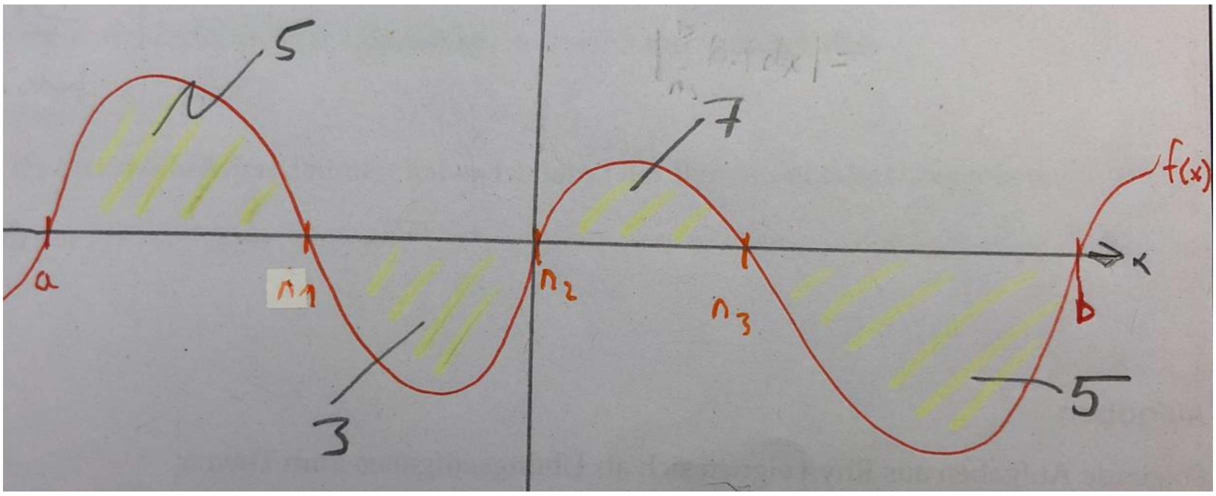
Beispiel:

$$\int_{1}^{4} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}1^3 = 21$$

Vorgehen, um die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse zu bestimmen:

1. Nullstellen bestimmen
2. Bestimmtes Integral zwischen den Nullstellen berechnen

Hierbei gilt es anzumerken, dass Flächen unterhalb der x-Achse immer ein Negatives Vorzeichen haben. Da eine Fläche aber immer ein positives Voreichen haben muss, wird der Betrag der Fläche verwendet. Dies ist insbesondere in diesem Fall wichtig:



Würden die Flächen so zusammengezählt, wie sie im bestimmten Integral berechnet werden, so käme:5-3+7-5=4 heraus. Dies ist aber nicht korrekt.

Um die Fläche zwischen zwei Funktionen zu bestimmen, werden die Flächeninhalte der bestimmten Integrale einfach voneinander abgezogen.

Rotationskörper

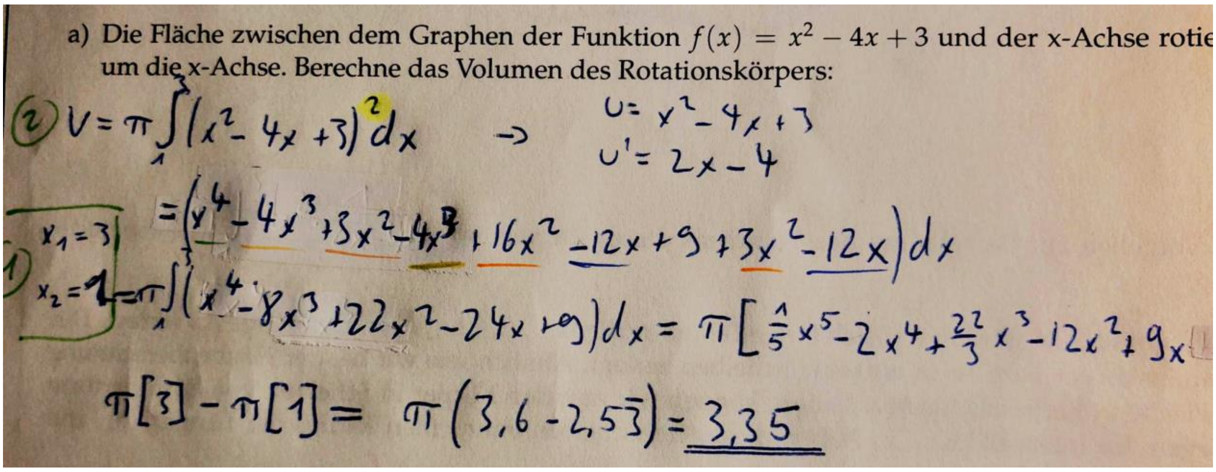
Ein Rotationskörper ist ein Volumen, welches durch eine Funktion begrenzt wird und danach um die x-Achse rotiert wurde.

Formel:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Um den Rotationskörper zwischen zwei Funktionen zu berechnen, werden die einzelnen Rotationskörper voneinander abgezogen. Anders als bei der Flächenberechnung dürfen die Funktionen nicht direkt subtrahiert werden, sondern müssen zuerst quadriert werden.

Beispiel:



a) Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ und der x-Achse rotie
um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers:

(2) $V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx \rightarrow u = x^2 - 4x + 3$, $u' = 2x - 4$

(1) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

$= \int_1^3 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 12x + 9 + 3x^2 - 12x) dx$

$= \pi \int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{22}{3}x^3 - 12x^2 + 9x\right.$

$\pi[3] - \pi[1] = \pi(3{,}6 - 2{,}5\overline{3}) = \underline{\underline{3{,}35}}$