Zusammenfassung Vektorgeometrie 3

Koordinatengleichung einer Ebene:

Die Koordinatengleichung einer Ebene lässt sich durch den Normalenvektor und einen Punkt auf der Ebene bestimmen:
Um d zu berechnen kann ein beliebiger Punkt auf E für A eingesetzt werden, dann kommt d heraus. Der Normalenvektor kann durch Drei Punkte auf der Ebene mit dem Kreuzprodukt berechnet werden.

$$n_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; A = (u\,|v|w) \longrightarrow E: ax + bv + cw + d$$

Parallelen, Spuren

Die Ebenen sind parallel, wenn die Normalenvektoren kollinear sind. Sie unterschieden sich um den Faktor k. Wenn sich die Konstante d auch um den Faktor k unterscheidet, sind sie identisch.

Spurgeraden, kurz Spuren beschreiben die Achsenabschnitte der Ebene. Sie werden durch einsetzen der jeweiligen Punkte berechnet: x: (p|0|0); y: (0|q|0); z: (0|0|r)
Danach werden sie miteinander verbunden.

Ist eine Ebene parallel zu einer Achse, so fehlt diese Komponente in der Koordinatengleichung. (Bsp. Parallel zu x-Achse: y+z+5=0)
Ist eine Ebene parallel zu einer Ebene, so fehlen diese Komponenten in der Koordinatengleichung. (Bsp. Parallel zu xy-Ebene : z+5=0)
Verläuft eine Ebene durch den Ursprung, so ist d = 0.

Neigungswinkel

Der Neigungswinkel zwischen einer Ebene und einer Gerden kann durch folgende Formel berechnet werden:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\left|\overrightarrow{v_G} \cdot \overrightarrow{n_E}\right|}{\left|\overrightarrow{v_G}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_G}\right|}\right) \quad \text{oder } \alpha = 1 - \arccos\left(\frac{\left|\overrightarrow{v_G} \cdot \overrightarrow{n_E}\right|}{\left|\overrightarrow{v_G}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_G}\right|}\right)$$

Durchstosspunkt

Um den Durchstosspunkt zu berechnen, werden 4 Gleichungen benötigt:
Ebenengleichung E, x-Gleichung, y-Gleichung, z-Gleichung

Beispiel:
E: 3x-2y+5z-4=0

$$g: \underset{r}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gleichungen: X=-5+2t; y=2; z=10-3t

Diese drei Gleichungen werden in die Ebenengleichung eingesetzt. Der wert für T muss dann noch in der Geradengleichung eingesetzt werden für das Resultat.

Schnittwinkel zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zweier Ebenen berechnet sich fast gleich wie vorhin, ausser dass hier arccos verwendet wird:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\left|\underset{v_G}{\rightarrow} \cdot \underset{n_E}{\rightarrow}\right|}{\left|\underset{v_G}{\rightarrow}\right| \cdot \left|\underset{v_G}{\rightarrow}\right|}\right)$$

Schnittgeraden zweier Ebenen

- Für den Richtungsvektor werden die zwei Normalenvektoren mit dem Kreuzprodukt multipliziert.
- Der Ausgangspunkt A kann bestimmt werden, indem die Beiden Ebenengleichungen gleichgesetzt werden. Dabei kann eine Koordinate weggelassen werden, da die Schnittgerade immer alle Achsenebenen durchquert (ausser es fehlt bereits eine Koordinate).
- Der errechnetet Anfangspunkt und der Richtungsvektor können nun als Geradengleichung dargestellt werden.

Abstand Punkt – Ebene

Als erstes müssen wir die Gleichung in die sogenannte Hessische Normalform (HNF) bringen. Dafür berechnen wir den Betrag und teilen anschliessend jeden Term der Ebenengleichung durch diesen. Dadurch erhält der Vektor eine länge von 1. Der Faktor t, um welchen der Normalenvektor einer Ebene verlängert werden muss, entspricht jetzt auch genau dem Abstand.

Die Formel zur Berechnung vom Abstand e lautet:

$e = |t| = |au + bv + cw + d|$ Diese Formel geht nur in der HNF!